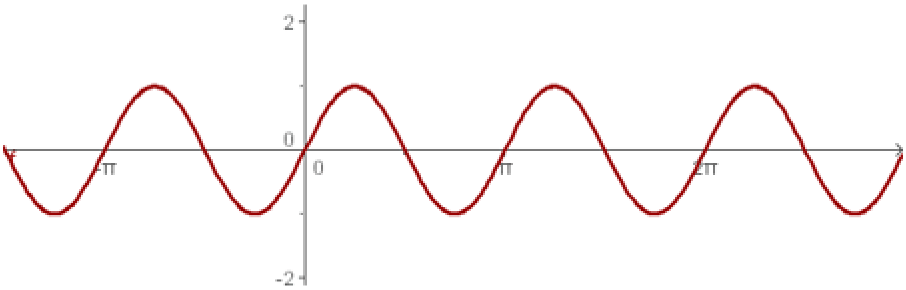
Continuidad de una función

Una idea intuitiva de **función continua** se tiene al considerar que su gráfica es continua, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.



Continuidad de una función en un punto

Se dice que una **función f(x) es continua en un punto x = a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Que el punto x= a tenga imagen.

$$\exists f(a)$$

2. Que exista el límite de la función en el punto x = a.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

3. Que la imagen el punto coincida con el límite de la función en el punto.

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo:

Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 4 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ en x =2

f(2)= 4

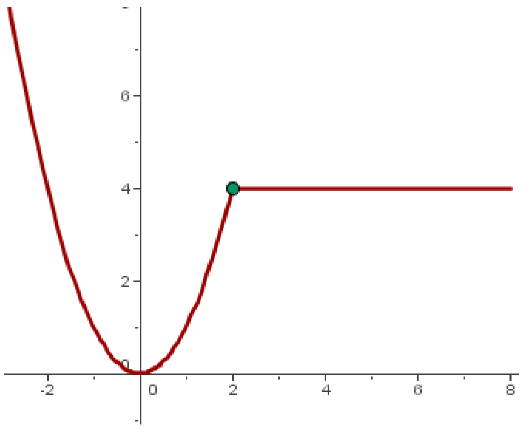
$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$

$\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$

luego $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

por tanto f(2) = $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

luego la función es continua en x=2



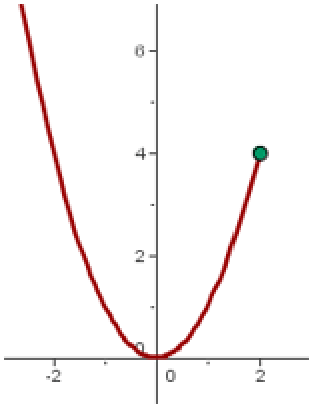
Continuidad lateral

Continuidad por la izquierda

Una función f(x) es **continua por la izquierda** en el punto x = a si:

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$



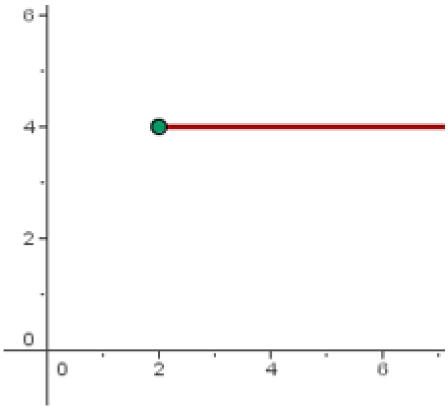
Continuidad por la derecha

Una función f(x) es **continua por la derecha** en el punto x = a si:

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Ejemplo:

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

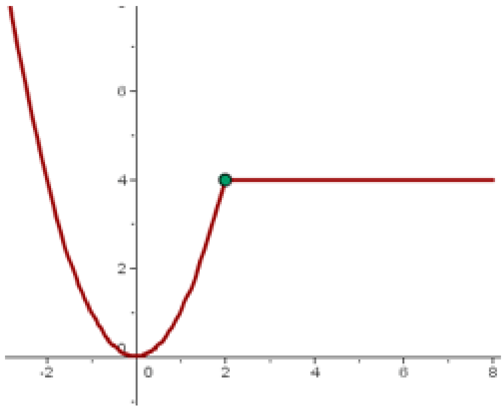


Una función f es continua en un punto si es continua por la izquierda y es continua por la derecha:

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Ejemplo:

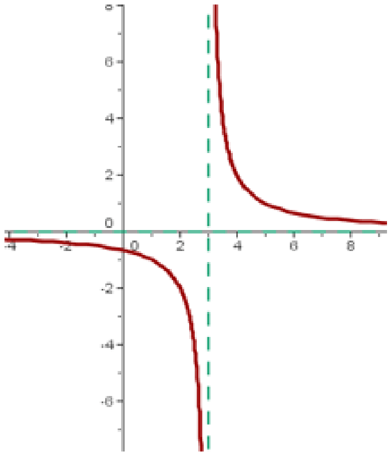
$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$



Continuidad de funciones

Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo:



La función $f(x) = \frac{2}{x-3}$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

En x = 3 no es continua porque no está definida.

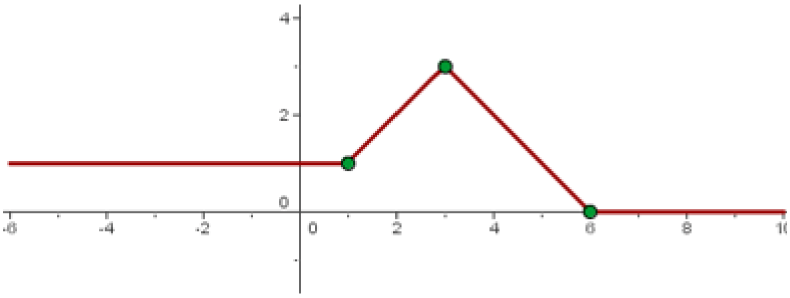
Funciones definidas a trozos

Las funciones definidas a trozos son continuas **si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de división de los intervalos**, por tanto tienen que coincidir sus límites laterales.

Ejemplo:

La función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x+6 & si \quad 3 < x \leq 6 \\ 0 & si \quad 6 < x \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Porque las funciones que la componen son polinómicas y los límites laterales en los puntos de división coinciden.



Operaciones con funciones continuas

Si **f y g son continuas en x=a**, entonces:

f + g es continua en x = a.

f · g es continua en x = a.

f / g es continua en x = a, si g(a) ≠ 0.

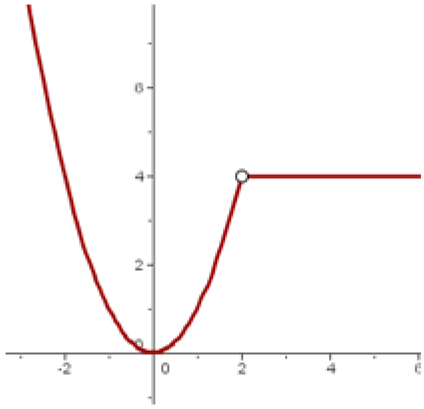
f o g es continua en x = a.

Discontinuidad de funciones

Si alguna de las **tres condiciones de continuidad** no se cumple, la **función** es **discontinua** en a.

Ejemplo:

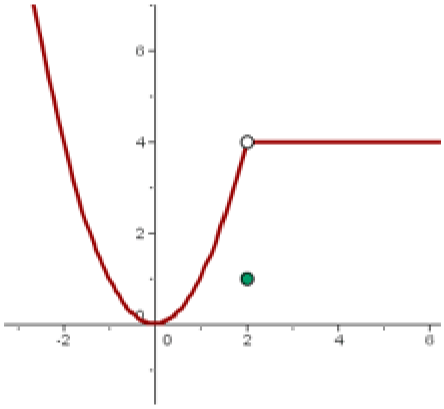
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \;\; x<2 \\ 4 & si \;\; x>2 \end{cases}$$



La **función** es **discontinua** porque **en x = 2 no existe imagen**.

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \;\; x<2 \\ 1 & si \;\; x=2 \\ 4 & si \;\; x>2 \end{cases}$$



La **función** es **discontinua** porque **en x = 2 no coincide la imagen con el límite**.

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable

Una discontinuidad es evitable en un punto x = a si $\lim_{x\to a} f(x)$ **existe y éste es finito.**

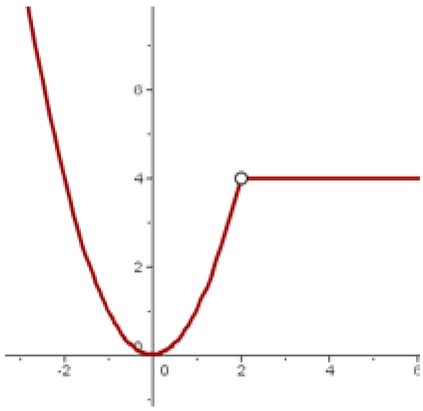
Nos encontramos con **dos tipos de discontinuidad evitable:**

1. La función no está definida en x = a. $\nexists f(a)$

Ejemplo 1:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \;\; x<2 \\ 4 & si \;\; x>2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=4 \qquad \nexists f(2)$$



2. **La imagen no coincide con el límite.** $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Ejemplo 2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 2x & si \quad x > 2 \\ 1 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

$f(2) = 1$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$

$f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$

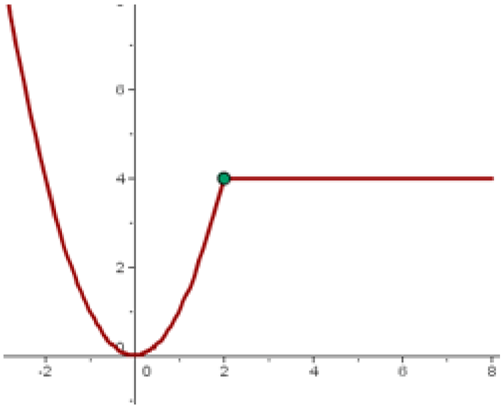
Cuando una función presenta una **discontinuidad evitable en un punto se puede redefinir en dicho punto para convertirla en una función continua.**

Ejemplo:

Redefinimos la función del ejemplo 1 para que sea continua en x=2:

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 4 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$



Discontinuidad inevitable

Una **discontinuidad es inevitable o de primera especie si existen los límites laterales en x = a, pero son distintos.**

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Salto

Salto es la diferencia en valor absoluto de los límites laterales.

$$\left| \lim_{x \to a^-} f(x) - \lim_{x \to a^+} f(x) \right|$$

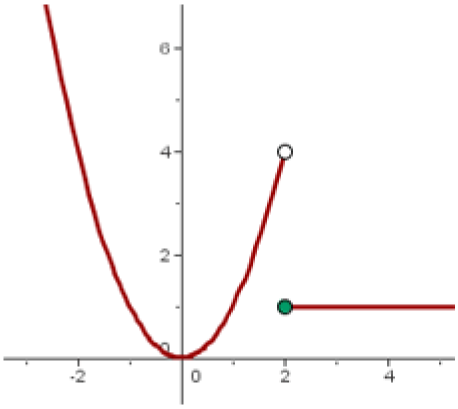
Según el tipo de salto nos encontramos con dos **tipos de discontinuidad inevitable**:

1. Discontinuidad inevitable de salto finito

La diferencia entre los límites laterales es un número real.

Ejemplo:

$$\left|\lim_{x \to a^-} f(x) - \lim_{x \to a^+} f(x)\right| = k \qquad k \in \mathbb{R}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ x < 2 \\ 2x & si \ \ x > 2 \\ 1 & si \ \ x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \qquad \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

En x = 2 hay una discontinuidad inevitable de salto finito 3.

2. Discontinuidad inevitable de salto infinito

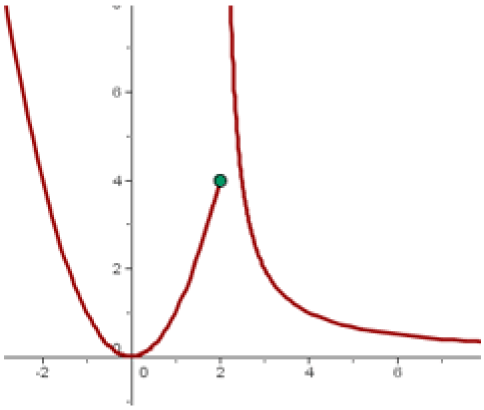
La diferencia entre los límites laterales es infinito.

$$\left|\lim_{x \to a^-} f(x) - \lim_{x \to a^+} f(x)\right| = \infty$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ x \leq 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & si \ \ x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{2}{x-2} = \infty$$



En x = 2 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.

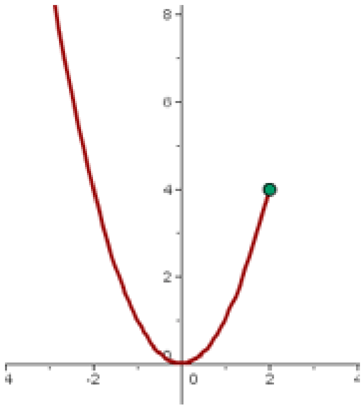
Discontinuidad esencial

Una **discontinuidad es esencial o de segunda especie si no existe alguno de los límites laterales en x = a.**

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 \ \ si \ \ x \leq 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \qquad \nexists \lim_{x \to 2^+}$$

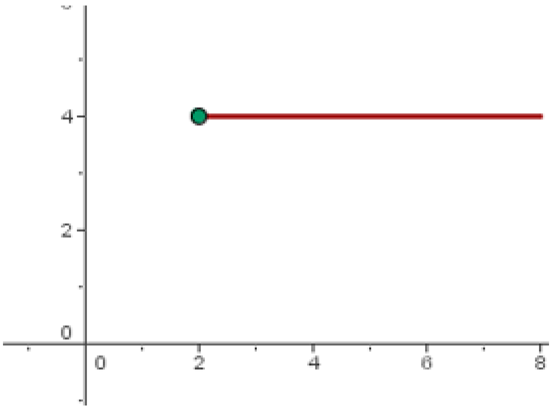


En x = 2 hay una discontinuidad esencial porque no tiene límite por la derecha.

Ejemplo:

$f(x) = 4 \quad si \quad x \geq 2$

$\nexists \lim_{x \to 2^-}$ $\qquad \lim_{x \to 2^+} 4 = 4$



En x = 2 hay una discontinuidad esencial porque no tiene límite por la izquierda.